PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA-LA MANCHA

JUNIO – 2014

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Puedes utilizar cualquier tipo de calculadora.

PROPUESTA A

1º) a) Calcula los valores de los parámetros $a,\ b \in R$ para que la siguiente función sea continua y derivable en x = 0: $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+a & si\ \ x\le 0 \\ x^2+be^x+3 & si\ \ x>0 \end{cases}$.

b) Para los valores encontrados, calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0.

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para\ \ x=0\ \Rightarrow \left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-2x+a\right)=f(0)=\underline{a} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+be^x+3\right)=be^0+3=\underline{b+3} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{a=b+3}. \qquad (1)$$

La función f(x) es derivable para todo R, excepto para el valor x = 0, que es dudosa su derivabilidad. Para que la función sea derivable para x = 0 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-2 & si\ \ x\le 0 \\ 2x+be^x & si\ \ x>0 \end{cases}\ \Rightarrow\ f'(0)=\begin{cases} -2 & si\ \ x\le 0 \\ b & si\ \ x>0 \end{cases}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{b=-2}}.$$

Sustituyendo en (1): $a=-2+3 \Rightarrow \underline{\underline{a=1}}$.

b)

La función resulta $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+1 & si\ \ x\le 0 \\ x^2-2e^x+3 & si\ \ x>0 \end{cases}$.

Para x = 0 es $f(0)=0^2-2\cdot 0+1=1$; el punto de tangencia es P(0, 1).

La pendiente de la tangente a una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto: $m=f'(0)=\underline{-2}$.

La recta punto-pendiente tiene por ecuación $y-y_0=m(x-x_0)$, que aplicada al punto y pendiente obtenidos:

$$y-1=-2(x-0)=-2x\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Recta\ tangente:\ t\equiv 2x+y-1=0}}.$$

****

2º) Calcula la integral definida: $I=\int_0^1 \left(x^2+x+1\right)\cdot e^{-x}\cdot dx$.

En primer lugar resolvemos la integral definida $A=\int \left(x^2+x+1\right)\cdot e^{-x}\cdot dx$ por el procedimiento de "por partes":

$$A=\int \left(x^2+x+1\right)\cdot e^{-x}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u=x^2+x+1 \rightarrow du=(2x+1)\cdot dx \\ e^{-x}\cdot dx=dv \rightarrow v=-e^{-x} \quad (*) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2+x+1\right)\cdot\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}\cdot(2x+1)\cdot dx=-\left(x^2+x+1\right)\cdot e^{-x}+\int e^{-x}\cdot(2x+1)\cdot dx=$$

$$=\underline{-\left(x^2+x+1\right)\cdot e^{-x}+B=A}. \quad (1)$$

$$B=\int (2x+1)\cdot e^{-x}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} u=2x+1 \rightarrow du=2dx \\ e^{-x}\cdot dx=dv \rightarrow v=-e^{-x} \end{array}\right\} \Rightarrow (2x+1)\cdot\left(-e^{-x}\right)-\int -e^{-x}\cdot 2dx=$$

$$=-(2x+1)\cdot e^{-x}+2\cdot\int e^{-x}\cdot dx=-(2x+1)\cdot e^{-x}-2\cdot e^{-x}+C=\underline{-e^{-x}(2x+3)+C=B}.$$

Sustituyendo en (1):

$$A=-\left(x^2+x+1\right)\cdot e^{-x}-e^{-x}(2x+3)+C=\underline{-e^{-x}\left(x^2+3x+4\right)+C}.$$

$$(*) \quad v=\int e^{-x}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} -x=t \\ dx=-dt \end{array}\right\} \Rightarrow v=\int e^{t}\cdot(-dt)=-\int e^{t}\cdot dt=-e^{t}=\underline{-e^{-x}}.$$

Se resuelve ahora la integral definida:

$$I=\int_0^1 \left(x^2+x+1\right)\cdot e^{-x}\cdot dx=\left[-e^{-x}\left(x^2+3x+4\right)\right]_0^1=\left[e^{-x}\left(x^2+3x+4\right)\right]_1^0=$$

$$=\left[e^{-0}(0+0+4)\right]-\left[e^{-1}(1+3+4)\right]=4-\frac{8}{e}=\underline{\underline{\frac{4e-8}{e}}}=I.$$

****

3º) a) Sabiendo que A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $|A|=5$, calcula razonadamente el valor de los determinantes $|-A|$, $|A^{-1}|$, $|A^{T}|$ y $|A^{3}|$.

b) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2$ calcula, usando las oportunas propiedades de los determinantes: $\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$.

----

a)

El valor de los determinantes de matrices cuadradas de orden par es el mismo; si el orden es impar se diferencian en el signo, por lo tanto: $\underline{\underline{|-A|=|A|=5}}$.

$$|A^{-1}|=\left|\frac{1}{A}\right|=\frac{1}{|A|} \Rightarrow \underline{\underline{|A^{-1}|=\frac{1}{5}}}.$$

El determinante de una matriz cuadrada es igual que el determinante de su matriz traspuesta: $\underline{\underline{|A^{T}|=|A|=5}}$.

El determinante de un producto de matrices es igual al determinante del producto de las matrices: $|A^{3}|=|A\cdot A\cdot A|=|A|\cdot|A|\cdot|A|=5\cdot 5\cdot 5=\underline{\underline{125}}$.

b)

$$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3-a & -b & 1-c \end{vmatrix}=-3\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3-a & -b & 1-c \end{vmatrix}=$$

$$=-3\cdot\left\{\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ -a & -b & -c \end{vmatrix}\right\}=-3\cdot(2+0)=\underline{\underline{-6}}.$$

Se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

"Si se multiplican o dividen todos los elementos de una línea de una matriz por un número, su determinante queda multiplicado o dividido por dicho número".

"Si los elementos de una línea de una matriz se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de los dos determinantes obtenidos al considerar por separado cada sumando de esa línea, y el resto de las líneas iguales a las del determinante inicial".

"Si una matriz tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales, su determinante es nulo".

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 30 & 0 & 10 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -400 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -400 \cdot 2 = \underline{\underline{-800}}$$

Además de algunas de las propiedades anteriores se ha utilizado la propiedad de los determinantes que dice:

"El valor de un determinante es igual a la suma de los elementos de una línea por los determinantes de sus menores adjuntos correspondientes".

****

4º) a) Halla $a \in R$ para que las rectas $r \equiv \begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{cases}$ se corten en un punto.

b) Para dicho valor de α, da la ecuación implícita de un plano π que contenga a r y s.

----

a)

La condición necesaria para que las rectas r y s se corten en un punto es que el sistema que forman sus ecuaciones lineales sea compatible determinado y, según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e iguales al número de incógnitas.

Las rectas r y s determinan el sistema $\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \\ x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de M es 3 por ser $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1-6+9-1=1 \neq 0$.

Como los rangos tiene que ser 3, el determinante de la matriz ampliada tiene que ser necesariamente cero:

$$|M'|=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & a \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \{C_2 \to C_2 - C_1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & a \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} C_1 \to C_1 + C_2 \\ C_3 \to C_3 + C_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & a+1 \end{vmatrix}=0 \;;\; \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & a+1 \end{vmatrix}=0 \;;\; a+1=0.$$

<u>Las rectas r y s se cortan en un punto para α = -1.</u>

b)

El punto P de corte de las rectas es la solución, por ejemplo, des sistema de ecuaciones lineales formado por las tres primeras: $\left.\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \\ x+y=0 \end{array}\right\}$.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \\ x+y=0 \end{array}\right\} \to y=-x \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} x-2x-z=1 \\ -x-x-3z=2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -x-z=1 \\ -2x-3z=2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2x-2z=2 \\ 2x+3z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{z=0}.$$

$-x-0=1$;; $\underline{x=-1}$;; $\underline{y=1}$ $\Rightarrow$ $\underline{P(-1,\ 1,\ 0)}$.

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determina, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1}=(1,\ 2,\ -1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(-1,\ 1,\ -3)$.

$$\overrightarrow{v'_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix}=-6i+j+k+2k+i+3j=-5i+4j+3k=(-5,\ 4,\ 3)\Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r}=(5,\ -4,\ -3)}.$$

Para determinar un vector director de $s\equiv\begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{cases}$ la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$s\equiv\begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2x-2y=0 \\ 3x+2y=-1-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=-1-\lambda} \ ;;\ x+y=0\ ;;$$

$$-1-\lambda+y=0\ ;;\ \underline{y=1+\lambda} \Rightarrow \underline{s\equiv\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_s}=(-1,\ 1,\ 1)}.$$

La expresión general del plano π pedido es: $\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right)\equiv\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 5 & -4 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$;;

$$-4(x+1)+3(y-1)+5z-4z+3(x+1)-5(y-1)=0\ ;;\ -(x+1)-2(y-1)+z=0\ ;;\ -x-1-2y+2+z=0.$$

$$\underline{\underline{\pi\equiv x+2y-z-1=0}}$$

****

PROPUESTA B

1º) a) Calcula los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=1+x^2 \cdot e^{-x^2}$.

b) Calcula las asíntotas de f(x).

----

a)

El dominio de la función es R y por ser $f(-)=1+(-x)^2 \cdot e^{-(-x)^2}=1+x^2 \cdot e^{-x^2}=f(x)$, la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas. Por ser $e^{-x^2} \neq 0,\ \forall x \in R$, la función f(x) es continua en su dominio.

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su derivada es positiva o negativa en ese punto, respectivamente.

$$f(x)=1+\frac{x^2}{e^{x^2}} \Rightarrow f'(x)=0+\frac{2x \cdot e^{x^2}-x^2 \cdot \left(2x \cdot e^{x^2}\right)}{\left(e^{x^2}\right)^2}=\frac{2x-2x^3}{e^{x^2}}=\underline{\frac{2x\left(1-x^2\right)}{e^{x^2}}}.$$

Teniendo en cuenta que $e^{x^2}>0,\ \forall x \in R$, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea el numerador de la derivada.

$$2x\left(1-x^2\right)=0 \Rightarrow \underline{x_1=-1},\ \underline{x_2=0},\ \underline{x_3=1}.$$

Las raíces de la derivada dividen el dominio de la función f(x) en cuatro periodos de crecimiento y decrecimiento alternativo (por ser una función continua); para determinar la índole de cada uno de ellos probamos con un valor sencillo de uno de los intervalos, por ejemplo x = 2 perteneciente al cuarto intervalo:

$$f'(2)=\frac{2 \cdot 2 \cdot \left(1-2^2\right)}{e^{2^2}}=\frac{4 \cdot (-3)}{e^4}=\frac{-12}{e^4}<0.$$

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\underline{Crecimiento \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow (-\infty,\ -1) \cup (0,\ 1)}}.$$

$$\underline{\underline{Decrecimiento \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow (-1,\ 0) \cup (1,\ +\infty)}}.$$

De los periodos de crecimiento y decrecimiento y la simetría se deduce que la función tiene máximos relativos para x = -1 y para x = 1 y un mínimo relativo para el valor x = 0. No obstante se hace el estudio mediante la segunda derivada.

Para que exista un máximo o un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada; para diferenciar los máximos de los mínimos recurrimos a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera, se trata de un máximo y si es positiva, de un mínimo.

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{2x\left(1-x^2\right)}{e^{x^2}}=0 \;;\; 2x\left(1-x^2\right)=0 \Rightarrow \underline{x_1=-1},\ \underline{x_2=0},\ \underline{x_3=1}.$$

$$f''(x)=\frac{\left(2-6x^2\right)\cdot e^{x^2}-2x\cdot\left(1-x^2\right)\cdot\left(2x\cdot e^{x^2}\right)}{\left(e^{x^2}\right)^2}=\frac{2-6x^2-4x^2+4x^4}{e^{x^2}}=\underline{\frac{4x^4-10x^2+2}{e^{x^2}}}.$$

$f''(-1)=f''(1)=\frac{4-10+2}{e}=-\frac{4}{e} \Rightarrow$ Máximos relativos para x = -1 y x = 1.

$$f(-1)=f(1)=1+1\cdot e^{-1}=1+\frac{1}{e}=\frac{1+e}{e} \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Máximos relativos}: P\left(-1,\ \frac{1+e}{e}\right)\ y\ Q\left(1,\ \frac{1+e}{e}\right)}}.$$

$f''(0)=\frac{2}{e^4}>0 \Rightarrow$ Mínimo para x = 0.

$f(0)=1+0\cdot e^0=1 \Rightarrow$ Mínimo relativo: R(0, 1).

b)

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Una función tiene una asíntota vertical para los valores finitos de x que hacer que la función valga más o menos infinito.

No hay asíntotas verticales. $\left(e^{x^2}\neq 0,\ \forall x\in R\right)$.

Asíntotas horizontales son los valores finitos de la función cuando x tiene a valer más infinito o menos infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{x^2}{e^{x^2}}\right)=\lim_{x\to\pm\infty} 1+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=1+\frac{\infty}{e^{\infty}}=\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{2x\cdot e^{x^2}}=\frac{1}{e^{x^2}}=\frac{1}{\infty}=0 \Rightarrow$$ La recta y = 1 es asíntota horizontal de la función.

No existen asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

****

2º) Para $c \geq 2$ definimos $A(c)$ como el área de la región encerrada entre la gráfica de la función $f(x) = \frac{1+x^2}{x^4}$, el eje de abscisas y las rectas x = 1 y x = c.

a) Calcula $A(c)$.

b) Calcula $\underset{x \to +\infty}{\ell ím} A(c)$.

----

a)

Sabiendo que $f(x) = \frac{1+x^2}{x^4} > 0, \ \forall x \in R$: $A(c) = \int_1^c \frac{1+x^2}{x^4} \cdot dx = \int_1^c \left(\frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^2} \right) \cdot dx =$

$$= \int_1^c \left(x^{-4} + x^{-2} \right) \cdot dx = \left[\frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x^{-1}}{-1} \right]_1^c = \left[-\frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} \right]_1^c = \left[\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x} \right]_c^1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1} \right) - \left(\frac{1}{3c^3} + \frac{1}{c} \right) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3c^3} - \frac{1}{c} =$$

$$= \frac{4c^3 - 1 - 3c^2}{3c^3} = \underline{\underline{\frac{4c^3 - 3c^2 - 1}{3c^3}}} = A(c).$$

b)

$$\underset{x \to +\infty}{\ell ím} A(c) = \underset{x \to +\infty}{\ell ím} \frac{4c^3 - 3c - 1}{3c^3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}.$$

****

3º) a) Se sabe que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x-y+z=8 \\ x-5y+az=4 \end{cases}$, $a \in R$, es compatible indeterminado. Calcula α y resuelve el sistema para dicho valor del parámetro.

b) Para el valor de α encontrado, da una solución particular del sistema tal que x = y.

----

a)

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & a \end{pmatrix}$ cuyo rango es mayor o igual que dos, por ser $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. Como el sistema es compatible indeterminado los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen que ser iguales y menor que el número de incógnitas, que es tres, por lo cual los rangos tienen que ser dos.

Por ser $Rango\ \ M=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -5 & a \end{vmatrix}=0\ ;;\ -a-30-2+3+5+4a=0\ ;;\ 3a-24=0 \Rightarrow \underline{\underline{a=8}}$.

Despreciando una de las ecuaciones, por ejemplo la tercera, y haciendo $\underline{z=\lambda}$:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y=4-3\lambda \\ 2x-y=8-\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x+4y=-8+6\lambda \\ 2x-y=8-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=5\lambda\ ;;\ \underline{y=\tfrac{5}{3}\lambda}\ ;;\ x=4-3\lambda+2\cdot\tfrac{5}{3}\lambda=$$

$$=4-3\lambda+\tfrac{10}{3}\lambda=\underline{4+\tfrac{1}{3}\lambda=x}.$$

$$\underline{\underline{Solución:\left\{\begin{array}{l} x=4+\frac{1}{3}\lambda \\ y=\frac{5}{3}\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\},\ \forall\lambda\in R}}$$

b)

Para x = y $\Rightarrow\ 4+\tfrac{1}{3}\lambda=\tfrac{5}{3}\lambda\ ;;\ 4=\tfrac{4}{3}\lambda\ \Rightarrow\ \underline{\lambda=3}$.

<u>Solución: x = y = 5; z = 3</u>.

****

4º) Dados el plano $\pi \equiv x - y = 4$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases}$, $a \in R$, se pide:

a) Estudia si existe algún valor del parámetro α para que r y π sean paralelos.

b) Estudia si existe algún valor del parámetro α para que r y π se corten perpendicularmente.

c) Para α = 1, da la ecuación implícita de un plano π' que contenga a r y corte perpendicularmente a π.

----

a)

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son los siguientes: $\overrightarrow{n_1} = (1,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2,\ 1,\ a)$.

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = 2j + k - i - aj = -i + (2-a)j + k = \underline{(-1,\ 2-a,\ 1)}.$$

Un vector normal del plano π es $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 0)$.

Para que r y π sean paralelos es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares. Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Rightarrow (-1,\ 2-a,\ 1) \cdot (1,\ -1,\ 0) = 0 \ ;; \ -1 - 2 + a + 0 = 0 \Rightarrow \underline{a = 3}.$$

<u>La recta r y el plano π son paralelos cuando α = 3</u>.

b)

Para que la recta r y el plano π se corten perpendicularmente es condición necesaria que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean linealmente dependientes, es decir: que sus componentes sean proporcionales:

$$\frac{-1}{1} = \frac{2-a}{-1} = \frac{1}{0} \Rightarrow \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{0}.$$

<u>r y π no se cortan perpendicularmente, independientemente del valor de α</u>.

c)

Para α = 1 es $r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$ y $\overrightarrow{v_r} = (-1,\ 1,\ 1)$.

Para hallar un punto de r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \underline{x=1-\lambda} \;;;\; y=-\lambda-2x=-\lambda-2+2\lambda=\underline{-2+\lambda=y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=-2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$. Un punto de r es P(1, -2, 0).

El plano π' pedido, por ser perpendicular a π, tiene como vector director al vector normal de π: $\overrightarrow{n}=(1,\ -1,\ 0)$. Por contener π' a r tiene a $\overrightarrow{v_r}=(-1,\ 1,\ 1)$ como vector director.

La expresión general o implícita de π' es: $\pi'(P;\ \overrightarrow{n},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;;;$

$-(x-1)+z-z-(y+2)=0 \;;;\; x-1+y+2=0$.

$$\underline{\underline{\pi' \equiv x+y+1=0}}$$

****